МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ**

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

# «*Обыкновенные дифференциальные уравнения*»

Методическое пособие, содержащее

основные теоретические сведения и методические указания к решению упражнений и практических задач

для студентов любых специальностей всех форм обучения

Братск 2013

Разработал: Степанова И.Ф., преподаватель высшей категории кафедры физико – математических дисциплин и вычислительной техники, заслуженный преподаватель «БрГУ»

Рецензент: Шевчук Ирина Николаевна, преподаватель Братского целлюлозно – бумажного колледжа ФГБОУ ВПО «БрГУ»

Рассмотрено на заседании кафедры физико – математических дисциплин и вычислительной техники

Протокол №8 от апреля 2013г.

Зав. кафедрой ФМД и ВТ ____________ И.Ф.Степанова

Одобрено и утверждено редакционным советом

От «____» ______________ 2011г. №___

Рецензия на методическое пособие

«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Данное методическое пособие содержит основные теоретические сведения и упражнения по разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» дисциплины «Элементы высшей математики (Математика)».

Пособие отражает связь фундаментальной теории и практики. Несомненным достоинством пособия является наличие большого количества примеров и упражнений, которые сопровождаются подробными объяснениями с указанием методов решения, а также приложений дифференциальных уравнений к решению задач из различных областей науки и техники.

Для более прочного усвоения материала студентам предлагаются разноуровневые задания, вопросы и упражнения для самостоятельного решения, вопросы и задачи для самостоятельного контроля с ответами. Также в пособии имеются необходимые справочные материалы – преобразования дробных выражений, свойства степени, преобразования логарифмических выражений, решение квадратных уравнений, таблица интегралов.

Материал систематизирован и изложен в форме, доступной для изучения и понимания для студентов любых специальностей и форм обучения.

Методическое пособие может быть использовано преподавателями, ведущими указанный раздел дисциплины «Математика», и преподавателями специальных дисциплин, в которых применяется решение дифференциальных уравнений.

Рецензент _______________ Шевчук Ирина Николаевна, преподаватель Братского целлюлозно – бумажного колледжа ФГБОУ ВПО «БрГУ»

## Содержание

## Введение

Благодаря широкому кругу дисциплин , в которых используются дифференциальные уравнения, изучение этой темы приобретает особо важное значение в системе среднего профессионального образования.

В течение трех веков, прошедших с момента появления дифференциальных уравнений в математике и физике, ученые самое серьезное внимание уделяли разработке аналитических методов решения дифференциальных уравнений. Эти методы сыграли важную роль в изучении самих дифференциальных уравнений и позволили рассмотреть множество прикладных задач.

Решение различных задач методом математического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется *дифференциальным.*

**Определение 1.** Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в торжество.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

**Пример 1.** Тело, масса которого m, свободно падает с некоторой высоты. Требует установить закон, по которому измеряется скорость $v=v(t)$ падение тела, если на него кроме силы тяжести P действует тормозящая сила $F_1$ сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

Решение. Пусть F – сила, под действием которой тело движется со скоростью $v=v(t)$ .Эта складывается из силы тяжести P=mg и силы сопротивления воздуха

$F_1 = -kv$, $k > 0$, т.е.

$$F=P+F_1=mg-kv. \tag{1}$$

Согласно второму закону Ньютона сила F, действующая на тело массы m, связана с вызываемым ею ускорением формулой F = ma. Так как $a = v'(t) = \frac{dv}{dt}$ , то

$$F = m\frac{dv}{dt}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$m\frac{dv}{dt} = mg-kv \qquad (3)$$

Уравнение (3) связывает искомую функцию $v=v(t)$ и ее производную $\frac{dv}{dt}$, поэтому

Является дифференциальным уравнением. Покажем, что всякая функция вида

$$v = C\ e^{\frac{-kt}{m}} + \frac{mg}{k}, \qquad (4)$$

где C- произвольная постоянная, является решением уравнения (3). В самом деле, заменив в уравнении (3) $v$ его значением из равенства (4), получаем

$$m\frac{d\left(Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\right)}{dt} = mg - k\left(Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right),$$

$$\text{т.е } m\left(-\frac{Ck}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right) = mg- kCe^{-\frac{k}{m}t} - mg,$$

или

$$-Cke^{-\frac{k}{m}t} = -Cke^{-\frac{k}{m}t}.$$

Таким образом, функция (4) представляет собой искомый закон изменения скорости.

**Пример 2.** Найти функцию, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть y = *f (x)*- искомая функция, а M (x,y)- произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предложим для определенности, что кривая расположена в первой части (рис.1). По условию задачи имеем BM=MA, а следовательно , OP = PA = x. Из рис. 1 видно, что tg($\angle PAM$) = MP/PA, т.е tg($180° - a$) $= y/x$, или – tg a = y/x.

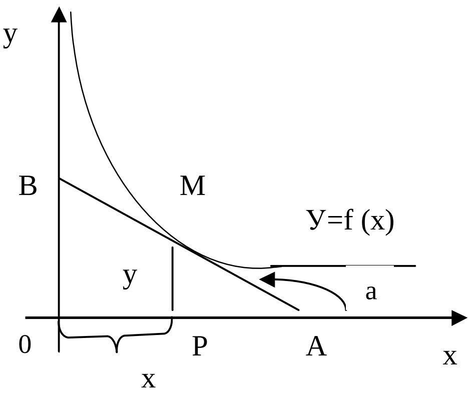



Рисунок 1.

Учитывая, что tg a есть угловой коэффициент касательной, который в точке M(x,y) равен y′, получаем дифференциальное уравнение

$$y' = - y/x \qquad (5)$$

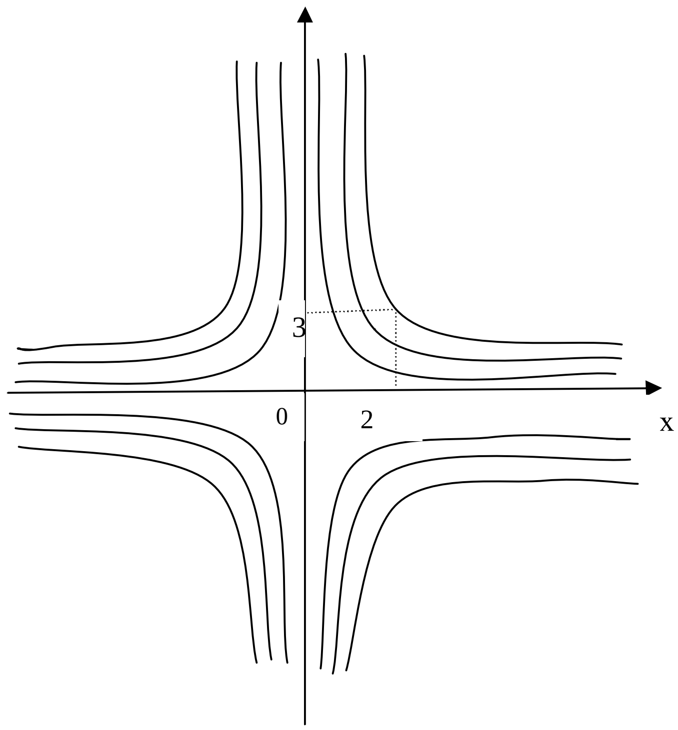
Решением уравнения (5) является всякая функция вида

$$y = C/x, \qquad (6)$$

где C- постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (5) y его значением из равенства (6), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{C/x}{x}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (6) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис.2).




. Рисунок 2.

**Пример 3.** Опытным путем установлено, что скорость размножения бактерий в любой момент времени положительна и пропорциональна их массе. Найти зависимость массы бактерий от времени.

Решение. Обозначим через m (t) массу бактерий в момент времени t; тогда $\frac{dm}{dt}$ будет скорость размножения этих бактерий. Согласно условию задачи скорость размножения $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна массе m (t) бактерий, поэтому

$$\frac{dm}{dt} = km\,(t) \qquad (7)$$

где к > 0 . Уравнение (7) содержит искомую функцию m(t) и ее производную, поэтому является дифференциальным уравнением. Убедимся, что любая функция вида

$$m(t) = Ce^{kt} \qquad (8)$$

где С- произвольная постоянная, является решением уравнения (7). В самом деле, заменив в уравнении (7) m его значением из равенства (8), имеем

$\frac{d(\mathrm{Ce}^{\kappa t})}{dt} = \mathrm{k}Ce^{kt}$,

или $\mathrm{Cke}^{\mathrm{kt}} = \mathrm{Cke}^{\mathrm{kt}}$.

Получим тождество, следовательно, функция (8) является решением уравнения (7). Так как функция $m(t) = \mathrm{C}e^{kt}$ определяет массу бактерий в зависимости от времени t, то задача решена.

**Пример 4.** На материальную точку М массой m действует постоянная сила $F_1$, направленная в сторону движения, и сила $F_2$, пропорциональна скорости и направленная против движения. Найти закон движения точки М.

Решение. Примем ось Ох прямую, по которой движется (точка М рис.3). Тогда положение точки М в момент

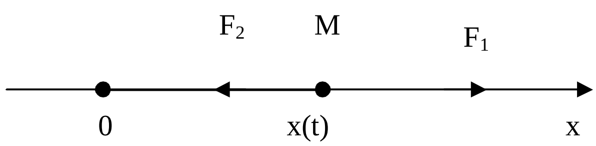



Рисунок 3.

времени t характеризуется координатой x=x (t). Согласно условию задачи сила $F_2$ пропорциональна скорости $v$ и направлена против движения, поэтому $F_2 = -kv$, где $k > 0$.

Так как $v = x'(t)$, то $F_2 = -kx'(t)$.

Результирующая сила F, под действием которой движется точка М, равна сумме сил $F_1$и $F_2$, т.е

$$F = F_1 + F_2 = F_1 - kx'(t). \qquad (9)$$

По второму закону Ньютона сила F, действующая на материальную точку массой m, связана с вызываемым ею ускорением формулой F = ma.

Учитывая, что при движении по прямой ускорение есть вторая производная от координаты, имеем

$$F = ma = mx''(t) \qquad (10)$$

Из равенств (9) и (10) следует уравнение движения точки М:

$$mx''(t) = F_1 - k'x(t). \qquad (11)$$

Уравнение (11) связывает первую и вторую производные искомой функцией x(t) и постоянную $F_1$ , поэтому является дифференциальным уравнением. Покажем что функция

$$x(t)=C_1e^{-kt/m}+\frac{F_1}{k}t + C_2 \qquad (12)$$

где $C_1$и $C_2$ − произвольные постоянные, является решением уравнением (11). Для этого находим

$$x'(t)= -\frac{k}{m}C_1e^{-kt/m}+\frac{F_1}{k}$$

и

$$x''(t)= -\frac{k^2}{m^2}C_1e^{-kt/m}$$

Подставляя найденные значения $x'(t)$ и $x''(t)$ в уравнение (11)

$$m\frac{k^2}{m^2}C_1e^{-kt/m} =F_1- k(-\frac{k^2}{m^2}C_1e^{-kt/m} + \frac{F_1}{k}),$$

Получаем тождество $\frac{k^2}{m^2}C_1e^{-kt/m} = \frac{k^2}{m}C_1e^{-kt/m}$

Таким образом, функция (12) является решением уравнения (11), следовательно, и законом движения точки М.

Рассмотренные примеры показывают, каким мощным математическим аппаратом является дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

**Раздел 1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия**

**1.1Понятие о совокупности решений, общем решении и частном решении дифференциального уравнения.**

**Определение 1.** *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую y и ее производную $y'$, $y''$,… $y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})=0 \qquad (13)$$

Например, уравнения $2x+y-3y'=0$, $y'^2-4=0$

$$\sin y' = \cos xy,\ y''= 2x$$

является дифференциальным уравнениями.

**Определение 2. Порядком дифференциального** уравнения называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Например, $xy'+y-2=0$ – уравнение первого порядка; $y'''+7y'-3y=0$ - уравнение третьего порядка; уравнение (13) является уравнением n-го порядка, записанным в общем виде.

**Определение 3**. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (14)$$

Разрешая уравнение (14), если это возможно, относительно производной $y'$, получим

$$y'= f(x,y) \qquad (15)$$

**Определение 4.** Уравнение (15) называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*

Иногда уравнения (14), (15) записывают в дифференциалах:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy=0 \qquad (16)$$

Так при различных значениях постоянной C равенство

$$y=C/x \tag{17}$$

Определяет различные решения уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{18}$$

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции

$$y=1/x \quad \text{при } C=1 \quad \text{и} \quad y=3/x \quad \text{при } C=3$$

является решениями уравнения (18).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, **бесконечная совокупность его решений.**

**Определение 5.** Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его **частным решением**. С геометрической точки зрения представляет собой семейство кривых, называемых **интегральными кривыми**, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Для многих дифференциальных уравнений первого порядка можно указать формулу вида

$$y=\varphi\,(x,C),\ \text{или}\ \ y= y(x,C) \tag{19}$$

где C – произвольная постоянная, такая что при любом C функция (19) является решением рассматриваемого уравнения. Как мы уже заметили, из формул общего вида (19) можно получить отдельные частные решения, придавая постоянной C различные фиксированные значения.

**Определение 6.** Функция, заданная формулой (19), представляет **общее решение** дифференциального уравнения (14) или (15), если при любом значении C эта функция является решением уравнения (14), соответственно (15), и любое частное решение может получено из (19) при некотором значении постоянной C, т.е. (19) представляет всю совокупность решений данного уравнения.

Если из формулы (19) можно получить лишь те решения, графики которых лежат в некоторой области, то говорят, что она представляет **общее решении в данной области.**

Иногда не удается получить решения дифференциального уравнения в явной форме y=φ (x) или y=φ (x,C), а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x,y) = 0 \text{ или } \Phi(x,y,c) \qquad (20)$$

**Определение 7.** Выражение Φ(x,y) = 0 или Φ(x,y,c) в этом случае называется **интегралом (частным, общим)** дифференциального уравнения.

Заметим, что не всегда из формулы вида (19) можно получить всю совокупность решений данного дифференциального уравнения.

Например, дифференциальное уравнение

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \qquad (21)$$

имеет при любом C решения

$$y = \sin(x+C). \qquad (22)$$

Функции y=1, y=−1

также являются решениями уравнения (21). Однако ни при каких значениях C они не могут быть получены из решения (22).

Можно указать и другие решения уравнения (21). Например, функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \le \frac{\pi}{2} - C \\ \sin(x + C) & \text{для } x > \frac{\pi}{2} - C \end{cases}$$

удовлетворяют уравнению (21) при любом C.

Заметим, что иногда (в некотором нестрогом смысле) любое решение общего вида (19) называют общим решением дифференциального уравнения (14).

**1.2 Задача Коши.**

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемые *начальные условия*. В случае дифференциальных уравнений первого порядка (15) под *начальными условиями* для его решения y=y(x) понимают условия, состоящие в том, что $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е

$$y=(x_0)=y_0 \qquad (23)$$

где $x_0$ и $y_0$ - заданные числа (начальные данные) такие что при $x = x_0$ и $y = y_0$ функция $f$ (x,y) имеет смысл, т.е. существует $f(x_0;y_0)$.

**Определение 8.** Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши.**

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: *найти решение* y = y(x) *уравнения* $y'=f$ (x,y) *удовлетворяющее при заданных начальных данных* $(x_0y_0)$ *начальному условию* $y = (x_0) = y_0$ *, или в другой записи*, $y_x=x_0=y_0$*, где* $x_0$*,* $y_0$*- заданные числа*.

Пусть даны начальные данные $x_0=2$, $y_0=3$ и требуется найти частное решение y = y(x) уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию y(2)=3. Мы отметили, что функция (5) при любом C является решением уравнения (6).Подставляя в формулу (5) начальные данные x=2, y=3, найдем 3= C/2, т.е. C =6. Таким образом, искомым частным решением уравнения (6) является функция

$$y = 6/x.$$

Геометрическое решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$.

Так, общее решение y = C/x уравнения y′ = − y/x определяет семейство равносторонних гипербол, асимптотами которых являются оси координат (рис.2), а также прямую y=o (при C=0). Частное решение y=6/x определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

**Пример 5.** Доказать , что при любом C функция

$$y=\frac{C}{x}+x^2 \qquad (24)$$

является решением уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = 3x. \qquad (25)$$

Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(1)=1.$$

Решение. Заменив в уравнении (25) y его значением из равенства (24), получим

$$\left(\frac{C}{x} + x^2\right)' + \frac{1}{x}\left(\frac{C}{x} + x^2\right) = 3x$$

или

$$-\frac{C}{x^2} + 2x + \frac{C}{x^2} + x = 3x, \text{т. е. } 3x \equiv 3x.$$

Следовательно, функция (24) является решением уравнения (25) при любом постоянном C. Подставляя в (24) начальные условия x=1, y=1, найдем

$$1 = \frac{C}{1} + 1, \text{ т.е } C = 0.$$

Таким образом, искомым частным решением будет функция $y = x^2$.

### 1.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 9.** Дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \qquad (26)$$

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными() переписать в виде (разделить переменные)

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx. \qquad (27)$$

Уравнение вида (27) называется уравнением с разделенными переменными.

Его решение находится **интегрированием** обеих частей:

$$\int \frac{dy}{f_{2(y)}} = \int f_1(x)dx = C\,, \qquad (28)$$

или

$$F_2(y) = F_1(x) + C. \qquad (29)$$

Итак, при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1)производную функции переписать через дифференциалы;

2) члены уравнения с одинаковыми дифференциалами перенести в одну сторону равенства и вынести дифференциал за скобку

3) разделить переменные (с учетом условий, когда это возможно сделать);

4) интегрируя почленно полученное уравнение с разделенными переменными (27), найти его общий интеграл (29);

5) выяснить, имеет ли уравнение (26) решения, не получающиеся из общего интеграла (29).

**Пример 6.** Найти общее решение уравнения

$(1+y)dx - (1-x)dy = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$-(x-1)dy = (1+y)dx$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{(1+y)} = -\frac{dx}{(x-1)}$.

Интегрируем: $\int \frac{dy}{(1+y)} = -\int \frac{dx}{(x-1)}$.

Получаем $\ln|1+y| = -\ln|1-x| + \ln C$

или, используя свойства логарифмов

$1+y = C/(1-x)$ – общее решение уравнения.

**Пример 7.** Найти общее решение уравнения $(3-2x)dx=(1+5y)\,dy$

Решение.

Это дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Интегрируем равенство:

$$\int (3-2x)dx = \int (1+5y)dy$$

$$3\int dx - 2\int xdx = \int dy + 5\int ydy$$

$$3x - 2\frac{x^2}{2} + C = y + 5\frac{y^2}{2}$$

или

$$3x - x^2 + C = y + 5\frac{y^2}{2}$$ – общее решение.

**Пример 8.** Найти общее решение уравнения $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$.

Решение.

Вынесем общие множители в обеих частях уравнения:

$$x(y^2 + 1)dx = y(1 - x^2)dy$$

Разделим переменные

$$\frac{xdx}{1 - x^2} = \frac{ydy}{y^2 + 1}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{ydy}{y^2 + 1} = \int\frac{xdx}{1 - x^2}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + 1\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|1 - x^2\right| + \frac{1}{2}\ln C.$$

Умножим равенство на 2:

$$\ln\left|y^2 + 1\right| = \ln C - \ln\left|1 - x^2\right|.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем общее решение

$$y^2 + 1 = \frac{c}{1 - x^2}$$

**Пример 9.** Найти общее решение уравнения $y' = x^2e^x$.

Решение.

Заменим обозначение производной $y'$ на $\frac{dy}{dx}$.

Получим

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x .$$

Разделяем переменные:

$$dy = x^2 e^x dx$$

Интегрируем:

$$\int dy = \int x^2 e^x\, dx.$$

$$\int dy = y,$$

а интеграл $\int x^2 e^x\, dx$ интегрируем по частям.

$$\int x^2 e^x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 \;, dv = e^x dx, \\ du = 2x dx, \; v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \; e^x \; - 2\int x e^x\, dx = x^2 \; e^x -$$

$$-2\begin{vmatrix} u = x \;, dv = e^x dx, \\ du = dx, \; v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \; e^x \; - 2(x\, e^x - \int e^x\, dx) = x^2 \; e^x \; - 2\, x \; e^x + 2\, e^x$$

$$+C.$$

Итак,

$$y = x^2 \; e^x \; - 2\, x \; e^x + 2\, e^x + C \text{ - общее решение.}$$

Найти частные решения уравнений.

**Пример 10. (**(2x-1)dy = (y+1)dx, если y = 0 при x = 5.

Решение.

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{2x-1}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{2x-1}$$

Получаем

$$\ln(y+1) = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + \ln c$$

или

$$y+1 = c \bullet \sqrt{2x-1} \text{ -общее решение.}$$

Подставим в общее решение начальные  условия x = 5,y = 0:

$$0+1 = C\sqrt{2 \cdot 5 - 1} \Rightarrow 1 = 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$$

Найденное значение С подставляем в общее решение:

$$y+1 = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1}$$

или

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1} - 1 \text{ - частное решение.}$$

**Пример 11.** $\frac{dx}{\cos^2 x \bullet \cos y} + \text{ctg}x \bullet \sin y dy = 0$, если $y = \pi$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

Разделим переменные:

$$\text{Siny cosy dy} = -\frac{dx}{(\cos x)^2 ctgx}.$$

Интегралы решаем методом замены переменной.

$$\int \text{Siny cosy dy} = \left| \begin{matrix} t = siny, \\ dt = cosydy \end{matrix} \right| = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{(siny)^2}{2}.$$

Заменим ctgx на $\frac{1}{tgx}$,

тогда

$$\int\left(-\frac{dx}{(\cos x)^2 ctgx}\right) = -\int \frac{tgx dx}{(\cos x)^2} = \left| \begin{matrix} z = tgx, \\ dz = \dfrac{dx}{(cosx)^2} \end{matrix} \right| = -\int zdz = -\frac{z^2}{2} = -\frac{(tgx)^2}{2}.$$

Имеем

$$\frac{(siny)^2}{2} = -\frac{(tgx)^2}{2} + \frac{C}{2}.$$

Умножим равенство на 2:

$$\text{Sin}^2 y = -\ tg^2 x + C - \text{ общее решение.}$$

Подставим в общее решение начальные условия:

$$\text{Sin}^2 \pi = -\ tg^2 \frac{\pi}{3} + C,$$

$$0 = -(\sqrt{3})^2 + C\ .$$

Отсюда С = 3.

Тогда $\sin^2 y = -tg^2 x + 3$ - частное решение.

## 1.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение 10.** Уравнение вида P ( x, y ) dx + Q( x,y) dy = 0, (30)

где P ( x, y ) и Q( x,y) – однородные функции одинакового измерения, называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Часто однородное уравнение записывают в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (31)$$

или

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (32)$$

Порядок решения:

1) в однородном дифференциальном нужно применить подстановку y = zx, где z = z(x) - новая неизвестная функция, y′ = z′ x +z ;
2) свести полученное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными;

3) разделить переменные и проинтегрировать;

4) выполнить обратную замену $z = y/x$.

Найти общие решения уравнений.

**Пример 12.** $(x^2-2y^2)dx +2\, xy\, dy=0$.

Решение.

В данном уравнении функции $P(x,y) = x^2-2y^2$, $Q(x,y) = 2\, xy$ – однородные функции второго измерения, следовательно, данное уравнение является однородным. Положим

$y=zx$,

откуда $dy = zdx + x\, dz$.

Подставляем эти выражения y и dy в данное уравнение:

$$x^2dx-2(zx)^2dx+2xzx(z\, dx+x\, dz)=0,$$

т.е. $$x^2dx-2z^2x^2dx+ 2z^2x^2dx+2zx^3dz=0$$

или $$dx+ 2\, zxdz=0.$$

Разделяем переменные (считая $x\neq0$):

$$2z\, dz + \frac{dx}{x} = 0.$$

Интегрируем почленно это уравнение ( учитывая, что z= (x)):

$$\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1,\text{откуда } z^2+1n|x| = 1n|C|,$$

$z^2 = \mathrm{Ln}\, |C| - \mathrm{Ln}|x|$ ,

$z^2 = \mathrm{Ln}\left|\frac{C}{x}\right|$,

т.е $\frac{C}{x} = e^{z^2}$ или

$x= Ce^{-z^2}$

Возвращаясь к прежней функции y (z=y/x), находим общий интеграл

$$x= Ce^{-y^2/x^2} \text{ – общее решение.}$$

**Пример 13.** $(x – y)ydx – x^2dy = 0$.

Решение.

Приведем уравнение к виду

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, где $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}$.

Применим подстановку  $y = zx$, $y' = z'x + z$ :

$z'x + z = \frac{(x-zx)zx}{x^2}$.

Упростим правую часть уравнения:

$\frac{(x-zx)zx}{x^2} = \frac{x^2(1-z)z}{x^2} = (1-z)z = z - z^2$.

Тогда

$z'x + z = z - z^2$,

$z'x = -z^2$,

$\frac{dz}{dx}x = -z^2$.

Разделяем переменные:

$\frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируем последнее равенство:

$\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dx}{x}$.

Получаем

$-\frac{1}{z} = -\ln|x| - lnC$,

$\frac{1}{z} = \ln|x| + lnC$,

$\frac{1}{z} = \ln(x + C)$

или

$\frac{1}{y/x} = \ln(x + C)$.

Отсюда

$\frac{x}{y} = \ln(x + C)$ – общее решение.

**Пример 14.** $x^2y' = y^2 - xy + x^2$.

Решение.

Приведем уравнение к виду

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, где $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y2 - xy + x2}{x^2}$.

Применим подстановку $y = zx$, $y' = z' x + z$ :

$z' x + z = \frac{(zx)2 - xzx + x2}{x^2}$ .

Упростим правую часть уравнения:

$\frac{(zx)2 - xzx + x2}{x^2} = \frac{x2(\ z2 - z + 1)}{x^2} = z^2 - z + 1$.

$z' x + z = z^2 - z + 1$

или

$z' x = z^2 - 2z + 1$,

$z' x = (z-1)^2$.

$\frac{dz}{dx} x = (z-1)^2$.

Разделяем переменные:

$\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируем последнее равенство:

$\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dx}{x}$.

Получаем

$-\frac{1}{z-1} = \ln x - \ln C$.

Тогда

$\frac{1}{z-1} = \ln \frac{C}{x}$,

$\frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = \ln \frac{C}{x}$,

$\frac{x}{y - x} = \ln \frac{C}{x}$ – общее решение.

**Пример 15.** $y' = \frac{y-x}{y+x}$

Решение.

$z'x + z = \frac{zx-x}{zx+x}$,

$z'x + z = \frac{x(z-1)}{x(z+1)}$,

$z'x = \frac{z-1}{z+1} - z$,

$z'x = -\frac{z^2+1}{z+1}$.

$\frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2+1}{z+1}$.

Разделяем переменные:

$\frac{(z+1)dz}{z^2+1} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируем последнее равенство:

$\int \frac{(z+1)dz}{z^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$.

В результате интегрирования получаем

$\frac{1}{2}\ln|z| + \operatorname{arctg} z = -\ln|x| + C$.

Заменяем z на y/x :

$\frac{1}{2}\ln|y/x| + \operatorname{arctg} y/x = -\ln|x| + C$ – общее решение.

**Пример 16**. Найти частное решение уравнения

$$2xyy' = x^2 + y^2,$$

если $y=2$ при $x=1$.

Решение.

Записав данное уравнение в виде

$$(x^2-y^2)dx - 2xy\,dy = 0 \qquad (32)$$

легко можно убедиться в том, что оно однородно. Положим $y=zx$, откуда

$dy = zdx + xdx$ . Подставляя значения y и dy в уравнение (32), имеем (при $x \neq 0$, $1-z^2 \neq 0$)

$(x^2 + z^2x^2)dx - 2xzx(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-z^2)\,dx = 2xzdz \Leftrightarrow \frac{2zdz}{1-z^2} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем

$-\ln|1-z^2| = \ln|x| - \ln|C|$ , $C \neq 0$,

откуда

$x(1-z^2) = C$, или $x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = C$.

Поставив в найденное решение начальные условия, найдем

$1 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C$ , т.е $C = -3$.

Итак, искомое частное решение будет

$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = -3$, или $x^2 - y^2 + 3x = 0$.

**Пример 17.** Составить уравнение кривой, проходящей через точку A(1;0), если известно, что угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $(2x + y)/2x$.

Решение. На основании геометрического смысла производной (угловой коэффициент касательной к равен производной функции $y'$) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2x},$$

т.е $(2x+y)dx - 2xdy = 0$.

В полученном уравнении $P(x,y) = 2x + y$ и $Q(x,y) = -2x$, следовательно, оно однородное. Положим $y = zx$ , откуда $dy = zdx + x\,dz$.

Тогда уравнение принимает вид

$(2x + zx)\,dx - 2x(zdx + xdz) = 0$

или $$(2 - z)\,dx - 2xdz = 0.$$

Разделяем переменные

$$\frac{2dz}{2-z} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$-\ 2\ \ln\ |2-z|-\ln|x| = -\ \ln\ |c| \Leftrightarrow 2\ln|2-z| + \ln|x| = \ln|C| \Leftrightarrow x(2-z)^2=0$$

Возвращаясь к прежней функции y, будем иметь

$x(2-\frac{y}{x})^2 = C$, или $(2x-y)^2 = Cx$.

Подставляя координаты точки A в найденное общее решение, получим

$(2\cdot1-0)^2 = C\cdot1$, т.е. $C=4$.

Итак, искомое уравнение кривой имеет вид

$(2x-y)^2 = 4x$.

## 1.5 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение 11.** Дифференциальное уравнение первого порядка y' = f{x, y) называется линейным, если имеет следующий вид:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{33}$$

где P(x) и Q(x)—заданные функции от x.

Приводим (без доказательства) теорему Коши для линейных уравнений первого порядка.

*Теорема Коши. Пусть (a; b) интервал, в котором функции P (x) и Q (x) непрерывны. Тогда: для любых* $x_0 \in (a;b)$ *и* $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ *задача Коши с начальными значениями* $(x_0; y_0)$ *имеет единственное решение, т. е. существует единственное решение y = y(x) уравнения* (33), *удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка (1) сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки

$$y = uv, \tag{34}$$

где u и $v$ —неизвестные функции от x. Из (34) находим

$$y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dx}. \tag{35}$$

Подставив значения y к y' в уравнение (33), получаем

$\mathrm{u}\frac{dy}{dx} + v(\frac{dy}{dx} + P(x)uv = Q(x)$

или

$$\mathrm{u}\frac{dy}{dx} + v(\frac{dy}{dx} + P(x)u = Q(x) \qquad (35)$$

Так как искомая функция у подстановкой (34) представлена в виде произведения двух функций u и $v$, то одну из них, например u, мы можем выбрать по нашему усмотрению, кроме u = 0. Выберем функцию u так, чтобы

$$\frac{dy}{dx} + P(x)u = 0, \qquad (37)$$

т. е. в качестве функции u возьмем одно из частных решений u* уравнения (37). Решая уравнение (37) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем отличную от нуля функцию

$$u^{*}=e^{-\int \mathrm{p(x)}dx}$$

Так как функция u* является решением уравнения (37), то после подстановки ее в уравнение (36) получим

$$u^{*}\frac{dy}{dx} = Q(x), \text{ т.е } dv = \frac{Q(x)}{u^{*}(x)}dx \qquad (38)$$

Решив уравнение (38) как уравнение с разделенными переменными, в котором u* известна, найдем функцию $v$ = — $v$(x, C), содержащую произвольную постоянную С и являющуюся общим решением уравнения (38).

Заменив в равенстве у = u$v$ функции u и $v$ к найденными значениями, получим решение

$$y = u^{*}(x)\, v(x, C)$$

уравнения (33), содержащее вместе с функцией $v$ и произвольную постоянную С.

**Пример 18.** Найти общее решение уравнения

$(1+ x^2)\, y' - xy = 2x.$

Разделив все члены данного уравнения на $1+x^2 \neq 0$, получаем $$y' - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}. \qquad (39)$$

Здесь $P(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, $Q(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Положим $y = uv$ , откуда $y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dx}$ .

Подставим эти значения $y$ и $y'$ в уравнение (39):

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dx} - \frac{xuv}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Сгруппируем члены, содержащие, например, $v$, и вынесем $v$ за скобку. Если то же самое сделать относительно функции u, то получится запись, аналогичная (40), в которой только поменяются ролями функции u и v.

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{dv}{dx} - \frac{xu}{1+x^2}\right) = \frac{2x}{1+x^2}. \qquad (40)$$

Выберем функцию $u \neq 0$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$\frac{dv}{dx} - \frac{xuv}{1+x^2} = 0. \qquad (41)$$

Тогда уравнение (40) примет вид

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}. \qquad (42)$$

Решаем уравнение (41) как уравнение с разделяющимися переменными (при $u \neq 0$):

$$\frac{du}{dx} - \frac{xu}{1+x^2} = 0, \text{ т.е } \frac{du}{u} = \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получаем $\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\ |1+x^2|^2)$, откуда

$$u=\sqrt{1+x^2} \qquad (43)$$

Подставив значение функции u в уравнение (42), найдем

$$\sqrt{1+x^2}\ \frac{du}{dx}=\frac{2x}{1+x^2},\ \text{т.е.}\quad dv=\frac{2x dx}{(1+x^2)^{3/2}},$$

откуда

$$v=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\ C. \qquad (44)$$

Заменив в подстановке $y=uv$ функции $u$ и $v$ их выражениями из равенств (43) и (44), получим искомое общее решение данного уравнения:

$$y=\sqrt{1+x^2}\,(C-\sqrt{1+x^2}),$$

или

$$y=C\sqrt{1+x^2}-2$$

**Пример 19.** Найти частное решение уравнения $xy'-y=x^3$, если $y=½$ при $x=1$.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде

$$y'-\frac{y}{x}=x^2.$$

Положим $y=uv$, откуда $\qquad y=u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dx}$.

Подставляем значения y и $y'$ в последнее уравнение

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dx}-\frac{uv}{x}=x^2$$

Сгруппируем члены, содержащие $v$, и вынесем $v$ за скобки:

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{dv}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x^2. \qquad (45)$$

Найдем функцию u такую, что

$$\frac{dv}{dx} - \frac{u}{x} = 0. \qquad (46)$$

Тогда уравнение (45) примет вид

$$u\frac{du}{dx} = x^2. \qquad (47)$$

Решая уравнение (46) как уравнение с разделяющимися переменными,

$$\frac{dv}{dx} - \frac{u}{x} = 0,$$

т.е $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{x},$

откуда, после интегрирования, получим

$$1n|u| = 1n|x|,$$

т.е $u = x.$

Подставив значение функции u в уравнении (47), найдем

$$x\frac{dv}{dx} = x^2,$$

или $dv = xdx.$

Отсюда $v = \frac{x^2}{2} + C.$

Итак, общим решением данного уравнения является функция

$y = x(\frac{x^2}{2} + C) = \frac{x^3}{2} + Cx.$

Находим частное решение, удовлетворяющее начальному условию y=1/2 при x=1,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \text{C}, \text{т. е C} = 0.$$

Следовательно, искомым частным решением является функция

$y = \frac{1}{2}x^3.$

Рассмотрим решение линейных уравнений в другой форме. В теоретической части этого подраздела указан вид общего решения линейного уравнения первого порядка

$y = uv$ , где функции u и v можно найти по формулам:

$u = e^{-\int p(x)dx}$ ,

$$dv = \frac{Q(x)}{u(x)}dx,$$

откуда $v = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx.$

**Пример 20.** Найти общее решение уравнения $x\,y' - y = -x$

Решение.

Приведем уравнение к стандартному виду, разделив его на x. получаем уравнение

$y' - \frac{y}{x} = -1.$

тогда $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -1.$

Находим функцию u:

$u = e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int(-\frac{1}{x})\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{lnx} = x.$

Итак, u = x.

Находим функцию v:

$v = \int \frac{-1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C.$

Тогда $y = uv = x(-\ln|x| + C)$ – общее решение.

**Пример 21.** Найти общее решение уравнения $y' + y = e^{-x}$.

Решение.

Здесь $P(x) = 1$, $Q(x) = e^{-x}$.

Тогда $u = e^{-\int 1\,dx} = e^{-x}$,

$v = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,dx = \int dx = x + C$

и $y = e^{-x}(x + C)$ – общее решение.

**Пример 22.** $xy' + y = \sin x$.

Решение.

Разделим уравнение на x:

$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$

Здесь $P(x) = 1/x$, $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$u = e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = x^{-1} = 1/x.$

$v = \int \frac{\frac{\sin x}{x}}{1/x}\,dx = \int \frac{x\sin x}{x} = \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

Тогда $y = 1/x\,(-\cos x + C)$ – общее решение.

**Пример 23.** $y'\sin x - y\cos x = 1$.

Решение.

Разделим уравнение на sinx:

$y' - \frac{cosx}{sinx}\, y = \frac{1}{sinx}$

или

$y' - \mathrm{ctg}x\ y = \frac{1}{sinx}$

Здесь $P(x) = -\mathrm{ctg}x$, $Q(x) = \frac{1}{sinx}$.

$u = e^{-\int(-\mathrm{ctg}x)\,dx} = e^{\int \mathrm{ctg}x dx} = e^{ln|sinx|} = \sin x$.

$v = \int \frac{\frac{1}{sinx}}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{(sinx)^2}\, dx = -\mathrm{ctg}x + C$.

Тогда $y = \sin x\,(-\mathrm{ctg}x + C)$ – общее решение.

**Пример 24.** $(1+x^2)y' - xy = 2x$.
Решение.

Разделим уравнение на $(1+x^2)$:

$y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Здесь $P(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, $Q(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

$u = e^{-\int(-\frac{x}{1+x^2})dx} = e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = e^{1/2ln|1+x^2|} = \sqrt{1+x^2}$.

$v = \int \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

Тогда $y = \sqrt{1+x^2}(-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + C)$.

## 1.6 Вопросы для самоконтроля по разделу 1

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Как определить порядок дифференциального уравнения?
3. Сколько постоянных интегрирования имеет дифференциальное уравнение первого порядка? третьего порядка?
4. Можно ли проверить правильность решения дифференциального уравнения? Как это сделать?
5. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического?
6. Чем отличается решение дифференциального уравнения от решения алгебраического?

7.В чем заключается задача Коши?

8.Каков геометрический смысл задачи Коши?

9. Чем отличается дифференциальное уравнение с разделенными переменными от дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?

10. Как разделяют переменные?

11. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка.

12. Какой подстановкой решается однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?

13. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

14. Запишите порядок решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

## 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

### 2.1 Общие понятия и определения

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (48)$$

или, если это возможно, в разрешенном относительно $y''$ виде

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (49)$$

**Определение**. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называется общим решением дифференциального уравнения второго порядка, если при подстановке ее в дифференциальное уравнение последнее обращается в тождество.

### 2.2 Неполные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

#### 2.2.1 Общие понятия и определения

Уравнение, содержащее производные ( или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (50)$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$y'' = f(x)$. (51)

Уравнения этого вида решаются двукратным интегрированием. Полагаем $y' = z(x)$; тогда $y'' = z'$ и уравнение (51) примет вид $z' = f(x)$, или $dz = f(x)\,dx$. Отсюда

$z = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1$,

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$. Так как $z = y'$, то

$y' = F(x) + C_1$ или $dy = F(x)\,dx + C_1\,dx$.

Отсюда, интегрируя еще раз, находим общее решение исходного уравнения в области , где существуют рассматриваемые интегралы:

$y = \int F(x)\,dx + C_1x + C_2$

### 2.2.2 Решение примеров.

**Пример 25.** Найти общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$.

Решение. Это неполное дифференцированное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Полагаем $\frac{dy}{dx} = z$; тогда данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sin x, \text{т. е.} \frac{dz}{dx} = \sin x$$

Откуда $dz = \sin x dx$.

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int dz = \int \sin x dx, \text{т. е. } z = -\cos x + C_1$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1, \text{т. е.} dy = (-\cos x + C_1)dx.$$

Снова интегрируя, находим

$$\int dy = \int (-\cos x + C_1)dx, \text{или } y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

**Пример 26.** Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}$, если $y = \frac{3}{2}$ и $\frac{dy}{dx} = 1$ при $x$=0.

Решение. Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Положим $\frac{dy}{dx} = z$; тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ и, значит, $\frac{dz}{dx} = 2z$.

Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, получим.

$$\frac{dz}{z} = 2z;\ \int \frac{dz}{z} = 2\int dx,\quad \ln z = 2x + C_1;\ \ z = e^{2x+C_1}$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+C_1} \qquad (*)$$

т.е. $dy = e^{2x+C_1}dx$.

Интегрируя, находим общее решение данного уравнения:

$$y = (1/2)\,e^{2x+C_1} + C_2 \qquad (**)$$

Для нахождения искомого частного решения подставим в соотношения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases} 1 = e^{2\cdot 0+C_1} \\ 3/2 = (1/2)e^{2\cdot 0+C_1} + C_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = e^{C_1} \\ 3/2 = (1/2)\,e^{C_1} + C_2 \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = (1/2)e^{2x} + 1$

**Пример 27.** Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$, если $y = 2$ и $\frac{dy}{dx} = 8$

при $x$=2.

Решение. Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Положим $\frac{dy}{dx} = z$; тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$.

Подставив выражения для $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+2}z$.

Разделив переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x+2}; \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x+2}, \quad \ln z = \ln(x+2) + \ln C_1$$

Откуда $z = C_1(x+2)$.

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}C_1(x+2). \qquad (*)$$

Теперь можно найти общее решение данного уравнения:

$$y = (1/2)C_1x^2 + 2C_1x + C_2 \qquad (**)$$

Найдем частное решение, подставив в уравнения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases} 8 = C_1(2+2) \\ 2 = (1/2)C_1 \cdot 2^2 + 2C_1 \cdot 2 + C_2 \end{cases}$$

Откуда $C_1$=2 и $C_2$= - 10. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = x^2 + 4x - 10$.

## 2.3Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

### 2.3.1Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 1. *Линейными однородными дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (52)$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных начальных данных ($x_0$, $y_0$,$y'_0$) задача Коши имеет, причем единственное, решение y= y(x) уравнения (52). Удовлетворяющее начальным условиям $y=(x_0)=y_0$, $y'(x_0)= y_0$ .

Для отыскания общего решения уравнения (52) составляется **характеристическое уравнение**

$$r^2 + pr + q = 0, \qquad (53)$$

которое получается из уравнения (52) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ ($y''$ и $y'$) на соответствующие степени $r$, причем сама функция $y$ заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (52) строится в зависимости от корней $r_1$ и $r_2$ характеристического уравнения (53). Здесь возможны три случая.

**I случай.** Корни $r_1$ и $r_2$ – действительны и различны. В этом случае общее решение уравнения (52) имеет вид.

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \qquad (54)$$

**II случай.** Корни $r_1$ и $r_2$ – действительны и одинаковы $r_1 = r_2 = r$. Тогда общее решение уравнения (52) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{rx} \qquad (55)$$

**III случай.** Корни $r_1$ и $r_2$ – комплексно – сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$ . В этом случае общее решение уравнения (52) записывается следующим образом:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \qquad (56)$$

### 2.3.2 Решение примеров.

**Пример 28.** Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2 - 7r + 10 = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (54) запишется так: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$.

**Пример 29.** Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$, если $y$=1 и $\frac{dy}{dx} = -1$ при $x$=0.

Решение. Составим характеристическое уравнение $r^2 - 5r = 0$, откуда $r_1$=0, $r_2$=5. Так как корни характеристического уравнения действительны и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{5x}, \text{ т.е. } y = C_1 + C_2e^{5x}$$

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных $C_1$ и $C_2$. Подставив в общее решение значения $x$=0, $y$=1, получим 1=$C_1$+$C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x$=0, $\frac{dy}{dx} = -1$, имеем $\frac{dy}{dx} = 5C_2e^{5x}$; $-1 = 5C_2$. Отсюда находим: $C_2 = -1/5$, $C_1 = 1 - C_2 = 6/5$. Таким образом. Искомое частное решение имеет вид $y = 6/5 - (1/5)e^{5x}$ .

**Пример 30.** Решить уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2 - 8r + 16 = 0$; $r_1 = r_2 = 4$. Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни; поэтому согласно формуле (55) общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде $y = (C_1 + C_2x)e^{4x}$.

**Пример 31.** Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 - 6r + 25 = 0;\ r_1 = 3 + 4i, r_2 = 3 - 4i;\ \text{здесь}\ \alpha = 3,\ \beta = 4.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, то общее решение дифференциального уравнения согласно формуле (56) записывается в виде $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

**Пример 32.** Найти частное решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y = 1$ и

$y' = 1$ при $x = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$r^2 + 8r + 16 = 0$; $r_1 = r_2 = -4$.

Тогда общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (55) записывается в виде $y = e^{-4x} (C_1 + C_2x)$.

Для нахождения частного решения находим производную от общего решения:

$y' = ( e^{-4x} (C_1 + C_2x))' = (e^{-4x})' (C_1 + C_2x) + e^{-4x} (C_1 + C_2x)' =$

$= -4 e^{-4x} (C_1 + C_2x) + C_2 e^{-4x} = -4 e^{-4x} C_1 - 4 e^{-4x} \cdot C_2x + C_2 e^{-4x}$.

Подставив начальные условия в выражения для y и y′ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \\ 1 = C_1e^0 + C_2e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases}$$

или $\begin{cases} 1 = C_1, \\ 1 = -4C_1 + C_2, \end{cases}$

откуда $C_1$=1 и $C_2$ = 5. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$y = e^{-4x}(1 + 5x)$.

**Пример 33.** Найти частное решение уравнения y″ +- 6y′ + 13y = 0, если y = 1 и

y′ = 5 при x = 0.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$r^2 - 6r + 13 = 0$; $r_1 = 3 + 2i$, $r_2 = 3 - 2i$: здесь α = 3, β= 2. Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно – сопряженных корня, то общее решение дифференциального уравнения согласно формуле (56) записывается в виде y = $e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Дифференцируя общее решение, имеем

$y' = 3e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{3x}(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x) =$
$= e^{3x}(3C_1\cos 2x + 3C_2\sin 2x - 2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x) =$

$e^{3x}((3C_1 + 2C_2)\cos 2x + (3C_2 - 2C_1)\sin 2x)$.

Подставив теперь начальные условия в выражения для y и y′ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0), \\ 5 = e^0((3C_1 + 2C_2)\cos 0 + (3C_2 - 2C_1)\sin 0), \end{cases}$$

или $\begin{cases} 1 = C_1, \\ 5 = 3C_1 + 2C_2, \end{cases}$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$y = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$.

## 2.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q действительные числа, $f(x) \neq 0$ – некоторая функция, y – искомая функция.

Общее решение неоднородного решения $y_{он}$ находим как сумму общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}$, найденного по виду правой части :

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$. (57)

**Правила нахождения $y_{чн}$.**

1.Если правая часть уравнения имеет вид

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, (58)

где $P_n(x)$ – многочлен степени n,то и y будет иметь такой же вид, причем, если:

а) α не является корнем характеристического уравнения, то

$y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$, (59)

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

б) α является корнем характеристического уравнения, то

$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$, (60)

где r – кратность корня α.

2. Если правая часть уравнения имеет вид

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, (61)

то:

а) если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то

$y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot (S_k(x)\cos\beta x + D_k(x)\sin\beta x)$, (62)

где $S_k(x)$ и $D_k(x)$ – многочлены степени $k = \max(m;n)$;

б) если $\alpha \pm i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то

$y_{чн} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (S_k(x)\cos\beta x + D_k(x)\sin\beta x)$, (63) где $S_k(x)$ и $D_k(x)$ – многочлены степени $k = \max(m;n)$ и r – кратность пары корней $\alpha \pm i\beta$.

В многочленах коэффициенты не определены, их находят методом неопределенных коэффициентов.

Итак, порядок решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) составить соответствующее однородное уравнение, найти его общее решение - $y_{оо}$ ;

2) найти $y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения;

3) записать общее решение неоднородного уравнения - $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$ ;

4) найти частное решение исходного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Потренируемся находить $y_{чн}$ в общем виде, не находя коэффициентов.

Пример… $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где а) $f(x) = 4$, б) $f(x) = x-1$, в) $f(x) = 3x^2$.

Решение. Так как f(x) в каждом случае является многочленом, то нет необходимости находить корни характеристического уравнения.

Получаем а) $y_{чн} = A$, так как 4 –const ( формула 59 при $\alpha = 0$ и $n = 0$) ; б) $y_{чн} = Ax+B$, так как x-1 – линейная функция ( формула 59 при $\alpha = 0$ и $n = 1$); в) $y_{чн} = A x^2 + Bx + C$ ( формула 59 при $\alpha = 0$ и $n = 2$).

**Пример 34.** Составить общий вид правой части решения дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 4y = f(x)$, где

а) $f(x) = e^{5x}$ , б) $f(x) = x e^{2x}$ , в) $f(x) = e^{x} \sin 3x$,

не находя значения неопределенных коэффициентов.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$k^2 + 5k + 4 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = -4$.

Показатели экспонент не являются корнями характеристического уравнения, поэтому решения будут иметь вид:

а) $y_{чн} = A e^{5x}$ ( формула 59 при $\alpha = 5$ и $n = 0$)

б) $y_{чн} = (Ax+B) e^{2x}$ ( формула 59 при $\alpha = 2$ и $n = 1$)

в) $y_{чн} = e^{x} (A\cos 3x + B \sin 3x)$ ( формула 62 при $\alpha = 1$, $\beta = 3$ и $n = 0$)

**Пример 35**. $y'' + 5y' + 4y = f(x)$, где а) $f(x) = e^{-x}$ , б) $f(x) = x e^{-4x}$.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$k^2 +5k +4 = 0$, $k_1 =-1$, $k_2 = -4$.

Очевидно, что для случая а) показатель экспоненты является корнем характеристического уравнения кратности r =1, поэтому $y_{чн} = A\,x\,e^{-x}$( формула 63 при r = 1, α = -1 и n =0).

Для случая б) $y_{чн} = A\,x^2\,e^{-4x}$ ( формула 63 при r =2, α = - 4 и n =0).

**Пример 36.** $y'' + 4y' +4y = f(x)$, где $f(x) = e^{-2x}$ .

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$k^2 +4k +4 = 0$, $k_1 = k_2 = -2$.

Показатель экспоненты является корнем характеристического уравнения кратности r =2, поэтому $y_{чн} = x^2\,e^{-2x}$ ( формула 63 при r =2, α = -2 и n =0).

Теперь рассмотрим метод неопределенных коэффициентов.

**Пример 37.** $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, где а) $f(x) = 4$, б) $f(x) = x-1$, в) $f(x) = 3x^2$.

Решение.

а) $y_{чн} = A$. для удобства записи обозначим $y_{чн} = u$, т.е. $u =A$

Находим $u' = A' = 0$, $u'' = 0$. Поставим значения u, u′ и u″ в исходное уравнение:

$0-3\cdot0 + 2A = 4$, следовательно, A = 2, поэтому $y_{чн} = 2$.

б) $u = Ax+B$, $u' = A$, $u'' = 0$. Поставим значения u, u′ и u″ в исходное уравнение:

$0 – 3A + 2(Ax+B) = x-1$.

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при переменной x одинаковой степени:

$– 3A + 2Ax+2B = x-1$.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} 2Ax = x, \\ -3A + 2B = -1. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ -3A + 2B = -1. \end{cases}$$

A = ½, $-3\cdot1/2 + 2B = 1$, тогда B = ¼.

$y_{чн} = 1/2x+1/4$.

в) $u = A\,x^2 + Bx + C$, $u' =2Ax + B$, $u'' = 2A$.

Поставим значения u, u′ и u″ в исходное уравнение:

$2A – 3(2Ax + B) + 2\cdot(A\,x^2 + Bx + C) =3x^2$.

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при переменной x одинаковой степени:

$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 3x^2$.

Имеем $\begin{cases} 2A = 3, \\ -6A + 2B = 0, \\ 2A - 3B + 2C = 0. \end{cases}$

Решая систему получаем значения коэффициентов A = 3/2, B =9/2, C =21/4.

$y_{чн} = 3/2\,x^2 + 9/2x + 21/4$.

**Пример 38.** $y'' + 5y' + 4y = e^{5x}$.

Решение. $u = A\,e^{5x}$, $u' = 5A\,e^{5x}$, $u'' = 25\,e^{5x}$.

Поставим значения u, u′ и u″ в исходное уравнение:

$25A\,e^{5x} + 5\cdot 5A\,e^{5x} + 4\cdot A\,e^{5x} = e^{5x}$.

Вынесем общий множитель:

$e^{5x}(25A + 25A + 4A) = 1$,

следовательно,54A = 1 и A = 1/54.

$y_{чн} = 1/54\cdot e^{5x}$.

**Пример 39.** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ .

Решение. Найдем корни характеристического уравнения:

$k^2 + 4k + 4 = 0$, $k_1 = k_2 = -2$.

Показатель экспоненты является корнем характеристического уравнения кратности r =2, поэтому $y_{чн} = A\,x^2\,e^{-2x}$.

$u = Ax^2\,e^{-2x}$, $u' = 2Axe^{-2x} - 2A\,x^2\cdot e^{-2x}$, $u'' = 2A\,e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1)$.

Поставим значения u, u′ и u″ в исходное уравнение:

$2A\,e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1) + 4(2Axe^{-2x} - 2A\,x^2\cdot e^{-2x}) + 4\,Ax^2\,e^{-2x} = e^{-2x}$ .

$e^{-2x}(4Ax^2 - 8Ax + 2A + 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2) = e^{-2x}$.

Разделим обе части равенства на $e^{-2x}$ и приравняем коэффициенты при переменной x одинаковой степени:

2A = 1 и A = ½.

Тогда $y_{чн} = 1/2\,x^2\,e^{-2x}$.

**2.5 Вопросы для самоконтроля по разделу 2.**

1) Запишите общий вид неполного дифференциального уравнения 2-го порядка.

2)Какую подстановку следует применить для решения неполного дифференциального уравнения 2-го порядка, не содержащего переменную у?

3)Какую подстановку следует применить для решения неполного дифференциального уравнения 2-го порядка, не содержащего переменную х?

4) Сколько произвольных постоянных входит в общее решение неполного дифференциального уравнения 2-го порядка.

5) Запишите порядок решения уравнения вида $y'' = f(x;y)$.

6) Как составить характеристическое уравнение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

7) Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения различные действительные числа .

8) Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения равные действительные числа.

9) Запишите общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения комплексные числа.

## Раздел3. Дифференциальные уравнения в науке и технике

### 3.1 Составление дифференциальных уравнений.

Мы уже отмечали, что многие задачи физики, техники, биологии и социальных наук решаются при помощи дифференциальных уравнений. При этом сначала составляется дифференциальное уравнение, которое затем решается, во многих частных случаях, по одному из указанных выше способов в зависимости от его типа. Составление дифференциальных уравнений по условию задачи напоминает составление алгебраических уравнений. При решении задач на составление дифференциальных уравнений широко используется геометрический и физический смысл производной, а также известные законы естественных и социальных наук.

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 40.** Конденсатор, емкость которого Q, включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q(t) конденсатора в момент времени t, если в начальный момент времени он был равен нулю. Δ Если в момент времени t заряд конденсатора равен q (t), то к этому моменту времени ток i равен $\frac{dq}{dt}$, а электродвижущая сила E равна разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора q/Q, т.е

$$E = U - \frac{q}{Q}.$$

Согласно закону Ома i=E/R, откуда

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}. \qquad (64)$$

Уравнения (64) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения сделаем подстановку q = $uv$, откуда

$$\frac{dq}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

или $$\frac{dq}{dt} = \frac{q}{QR} = \frac{U}{dt}.$$

Подставляя значения $q$ и $\frac{dq}{dt}$ в уравнение (64), группируя члены, содержащие $v$, вынося его за скобки, получим

$$u\frac{du}{dt}+ v\left(\frac{du}{dt} + \frac{u}{QR}\right) = \frac{U}{R}. \qquad (65)$$

Найдем функцию u, удовлетворяющую условию

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{QR} = 0, \qquad (66)$$

тогда уравнение (65) примет вид

$$u\frac{du}{dt} = \frac{U}{R}\,. \qquad (67)$$

Из уравнения (66) находим

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{QR},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$1n|u|=-t/(QR)$$

или $$u=e^{-t/(QR)}. \qquad (68)$$

Подставим полученную функцию u в уравнение(67), тогда

$e^{-t/(QR)}\frac{dv}{dt} = \frac{U}{R}$ , т.е . $dv = \frac{U}{R}\, e^{t/(QR)}\, dt$,

откуда $v=\int \frac{U}{R}\, e^{t/(QR)}\, d\,t = \frac{U}{R}\, QR\, e^{t/(QR)} + C$,

или $v= QU\, e^{t/(QR)} + C$.

Таким образом, $q= QU+C\, e^{t/(QR)}$.

Постоянную C найдем из условий q=0 при t =0 :

0= QU- $QUe^{t/(QR)}$ = $QU(1-e^{t/(QR)})$.

### 3.2.Дифференциальное уравнение показательного роста.

Ряд задач на составление дифференциальных уравнениям вида

$$y' = ky, \tag{69}$$

где k- постоянная величина.

Уравнение (69) называется *уравнением показательного роста.* Его смысл состоит в том, что скорость изменения функции пропорциональна самой функции.
Перепишем уравнение(69) в виде

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \Rightarrow 1n|y| = kx + 1n|C \Rightarrow |1n|y| = 1ne^{kx} + 1n|C|,$$

или

$$y=Ce^{kx} \tag{70}$$

**Пример 41.** Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0$= 20 км/ч. Определить скорость катера через 2 мин после выключения двигателя, если за 40 с она уменьшилась до $v_1$=8км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Пусть скорость движения катера в момент времени t равна $v$. Тогда на движущийся катер действует сила сопротивления воды $F=-kv$. Но согласно закону Ньютона $F = ma = m\frac{dv}{dt}$, а согласно ,

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \tag{71}$$

Уравнение (71) является дифференциальным уравнением показательного роста, поэтому его общим решением будет

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} \text{ ?} \qquad (72)$$

Постоянную С найдем из начального условия $v(0)$=20 км/ч:

$20 = Ce^{-\frac{k}{m}0}$ т.е. С=20

Итак, скорость движения катера после выключения двигателя определяется формулой $v=20e^{-\frac{k}{m}t}$. (73)

Найдем значения постоянной $e^{-k/m}$. Для этого воспользуемся условием, что при t= 40 ,с=1/90 ч скорость $v$=8 км/ч:

$8=20e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{1}{90}$ т.е $e^{-\frac{k}{m}t} = (2/5)^{90}$.

Положив в равенстве (78) t=2 мин=1/30 мин и $e^{-k/m} = (2/5)^{90}$, найдем искомую скорость:

$v= 20((2/5)^{90})^{1/30} = \frac{32}{35} = 1,28$ ( км/ч)

**Пример 42.** Скорость распада радия в момент времени t пропорциональна его количеству m(t). Пусть в начальный момент времени масса радия $m_0$= 200г. Сколько радия останется через 300лет, если известно, что период Т полураспада радия ( промежуток времени, через который первоначальная масса радия уменьшается в два раза) равен 1550 годам?

Решение. Из условия задачи имеем

$$\frac{dm}{dt} = -km, \qquad (74)$$

где $k > 0$ . Знак минус показывает, что масса радия убывает, а следовательно, скорость распада $\frac{dm}{dt}$ отрицательна. Интегрируя уравнение (74), найдем его общее решение

$$m(t) = Ce^{-кt} \qquad (75)$$

Согласно условию m(0)=200г; имеем

$200= Ce^{-k\cdot 0}$ , т.е. C= 200.

Следовательно , $m(t) = 200e^{-кt}$ .

Коэффициент k найдем из условия, что $m(t) = \frac{1}{2}m(0) = \frac{1}{2}\cdot 200 = 100$ при T=1550:

$100= 200e^{-1550к} \Leftrightarrow e^{-1550k} = 1/2 \Leftrightarrow e^{1550k} = 2 \Rightarrow 1550k = 1n2 \Leftrightarrow k = \frac{1n2}{1550} \approx 0{,}0004474$.

Таким образом, $m(t) = 200e^{\frac{1n2}{1550}t}$ .

Положив t=300, найдем количество радия, оставшегося нераспавшимся через 300лет:

$m(300)=200\, e^{\frac{1n2}{1550}\cdot 300} \approx 200e^{-0{,}000447\cdot 300} \approx 174{,}88$г.

**3.3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний**.

Рисунки!!!!!!!

Пусть шарик массой m прикреплен двумя прижимами так, как показано на рис.а???. В положении равновесия координата центра шарика равна нулю. Сместим шарик в направлении оси Ох рис. Б. Тогда согласно закону Гука на шарик действует сила, пропорциональная смещению х,

$$F=-\gamma x, \qquad (76)$$

где $\gamma>0$. Знак минус указывает, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную направлению смещения. По второму закону Ньютона имеем

F=ma (77)

Из равенств (76) и (77) следует

m= $-\gamma$x. (78)

рис.

Так как ускорение a прямолинейного движения есть вторая производная координаты (пути) по времени t (a=$\frac{d_x^2}{dt^2}$), то равенство (78) можно переписать в виде

$\frac{d_x^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}x = 0.$

Положив $\omega^2 = \gamma/m$, получим

$$\frac{d_x^2}{dt^2} + \omega^2 x=0. \qquad (79)$$

Уравнение (79) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если физическая величина изменяется во времени в соответствии с уравнением (79),то говорят, что она совершает *гармонические колебание*. Поэтому уравнение (79) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Решим уравнение (79). Для этого составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 + \omega^2 =0$, т.е. $k_1 = \omega i$, $k_2 =- \omega i$.

Следовательно, общим решением уравнения (79) будет функция

$$x=C_1 \cos \omega t+C_2 \sin \omega t. \qquad (80)$$

Вместо произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ соотношениями

$$C_1 = A\sin\varphi,\ \ C_2 = A\cos\varphi \qquad (81)$$

Тогда равенство (80) примет вид

$$x = A\sin\varphi\cos\varphi t + A\cos\varphi\ \omega t,$$

или

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (82)$$

Равенство (82) является *уравнением гармонических колебаний* . Величина А представляет собой наибольшее отклонение тела от положения равновесия и называется *амплитудой колебания.*

Из равенства (81) следует

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Так как sin u – периодическая функция с наименьшим периодом 2π, то наименьший период гармонического колебания найдем из равенства

$$\omega(t+T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega. \qquad (83)$$

Величина $\omega = 2\pi/T$ называется *частотой колебания*. Наконец, величину $\varphi$ называют *начальной фазой* гармонического колебания и находят из равенств (81).

**Тестовые задания**

**Задание1.** Установите соответствие между записью дифференциальных уравнений первого порядка и их названиями.

1) $(2x-1)\, dy + (3y+2)\, dx = 0$

2) $(3x^2+y^2)\, dy + (2x^2-3y^2)\, dx = 0$

3) $y' + 2xy = e^x$

А) линейное

В) однородное

С) с разделяющимися переменными

**Задание 2.** Разделение переменных в дифференциальном уравнении
$\sin x \cos y\, dx + \sin y \cos x\, dy = 0$ приведет его к виду…

Варианты ответов:

1) $\frac{\sin x \cos x\, dx}{\sin y} = \frac{dy}{\cos y}$;  2) $\frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \frac{\cos y\, dy}{\sin y}$;

3) $\frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\frac{\sin y\, dy}{\cos y}$;  4) $\frac{\cos x\, dx}{\sin x} = -\frac{\cos y\, dy}{\sin y}$.

**Задание 3.** Однородными дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения…

Варианты ответов:

1) $\frac{x}{y}\, dy = \ln \frac{y}{x}\, dx$;  2) $y^2\, dx = e^x dx$;

3) $(x+y)dx + xdy = 0$;  4) $x \frac{dy}{dx} = y + \cos^2 \frac{y}{x}$.

**Задание 4.** Установите соответствие между начальными условиями и решениями уравнения $y' - x = 0$, полученными при данных начальных условиях.

1) $y(0) = 0$

2) $y(0) = 1$

3) $y(2) = 0$.

Варианты ответов:

А) $y = \frac{x^2}{2} + 1$

В) $y = \frac{x^2}{2} - 2$

C) $y = \frac{x^2}{2}$

**Задание 5.**Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ имеет вид…

Варианты ответов:

1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ 2) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;

3) $y = e^{2x}( C_1 x + C_2)$; 4) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

**Задание 6.** Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y = C_1 e^{2x} + +C_2 e^{-x}$, тогда корни характеристического уравнения равны…

Варианты ответов:

1) $r_1 = r_2 = 2$ 2) $r_1 = -2,\ r_2 = 1$

3) $r_1 = 0,\ r_2 = -1$ 4) $r_1 = 2,\ r_2 = -1$

**Задание 7.** Частное решение дифференциального уравнения

$y'' + 2y' - 5y = 3x^2$, найденное по виду правой части имеет вид…

Варианты ответов:

1) $y = Ax+B$ 2) $y = A$

3) $y = Ax^2 + Bx + C$; 4) $y = (Ax+B)x^2$

**Задание 8.** Определить частное решение дифференциального уравнения

$y'' - y = \sin 2x$, учитывая форму правой части…

Варианты ответов:

1) $y = A \cos 2x + B \sin 2x$; 2) $y = (Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x$;

3)$y = A e^{-x} + B e^{x}$; 4) $y = e^{x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

**Ответы к тестовым заданиям.**

Задание 1.Ответ: 1 – C, 2 – B, 3 –A.

Задание 2. Ответ: 3.

Задание 3. Ответ: 1 и 3.

Задание 4. Ответ: 1 – С, 2 –А,  3 – В.

Задание 5. Ответ: 2.

Задание 6. Ответ: 4

Задание 7. Ответ: 3.

Задание 8. Ответ: 1.

**Заключение**

Благодаря широкому кругу дисциплин, в которых используются дифференциальные уравнения, изучение этой темы приобретает особо важное значение в системе среднего профессионального образования. Дифференциальные уравнения помогают развивать основные идеи **математического моделирования** и формировать умение **правильно анализировать прикладные задачи и делать выводы**. Возникнув в 16 веке на базе задач механики и физики, теория дифференциальных уравнений как самостоятельная дисциплина сложилась к концу 18 века. В настоящее время теория дифференциальных уравнений продолжает развиваться и является одной из важнейших частей математики.

Большой вклад в развитие теории дифференциальных уравнений внесли российские и советские ученые М.А. Лаврентьев, Ю.А. Митропольский, А.Я. Хинчин, И.Г. Петровский и другие.

**Приложение А  Преобразования дробных выражений**

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$  $c = \frac{ad}{b}$  $d = \frac{bc}{a}$ .

2. $ab = \frac{c}{d} \Rightarrow a = \frac{c}{bd}$, $b = \frac{c}{ad}$, $c = abd$, $d = = \frac{c}{ab}$

3. $a = b\frac{c}{d} \Rightarrow b = \frac{ad}{c}$,  $c = \frac{ad}{b}$,  $d = \frac{bc}{a}$.

## Приложение Б Некоторые свойства степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$.
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
5. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

## Приложение В  Преобразования логарифмических выражений

1. $Ln(x \cdot y) = lnx + lny$

2. $ln \frac{x}{y} = lnx - lny$

3. $lnx = a \Rightarrow x = e^{a}$

4. $e^{lnx} = x$

5. $e^{nlnx} = x^{n}$

**Приложение Г  Решение квадратных уравнений**

1. $ах^2 + вх + с = 0$

$D = в^2 – 4ас.$

Если $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$,то $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

2. $x^2 + px + q = 0$

Теорема Виета

$x_1 + x_2 = -p$,

$x_1 \cdot x_2 = q$.

## Приложение Д Таблица основных интегралов

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$; при n=0 $\int dx = x + C$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg \, x + C$

9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10) $\int e^x dx = e^x + C$

11) $\int tg \, x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

12) $\int ctg \, x \, dx = \ln|\sin x| + C$

13) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

14) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

15) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

16) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

17) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C\right|$

20) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

21) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

## Список использованных источников

**Основные источники:**

1.Григорьев С.Г. Математика: Учебник для студенческих средне профессиональных учреждений – М: Издательский центр « Академия», 2005.

2.Дадаян А.А. Математика: учебник – М: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА – М,2006.

3.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средне профессиональных учебных заведений – М: «Высшая школа», 2009.

**Дополнительные источники:**

1.Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: В 2 –х частях. учеб./ Каченовский М.И. и др. под ред. Яковлева Г.Н. – М.: Наука, 1987.

2. Валуцэ И.И. и др. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособ. – М.: Наука,1990.

3.Щипачев.В.С. Высшая математика: Учебник. – М.: Высшая школа, 2000.

4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2т. учеб. пособ. – М.: Высш. шк., 1998.

5. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособ. – М.: Высш. шк., 2001.

**Интернет – ресурсы:**

1.http: // www.math test.ru.

2.http: // www.webmath.ru.

3.http: // e - scince.ru.

4. http: // mathem lib.ru.